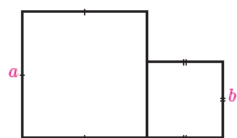
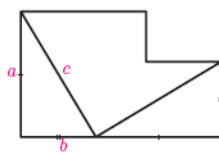


رابطه فیثاغورس

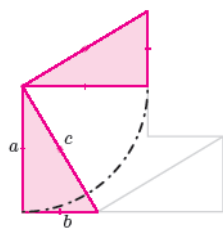
۱. شکل‌های زیر مراحل یکی از اثبات‌های قضیه فیثاغورس را نشان می‌دهد. با توجه به شکل‌ها، اثبات را بنویسید.



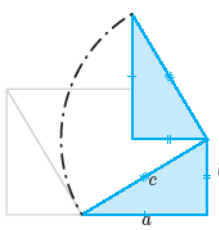
شکل ۱



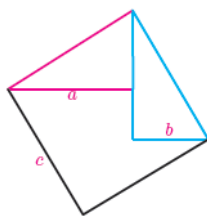
شکل ۲



شکل ۳



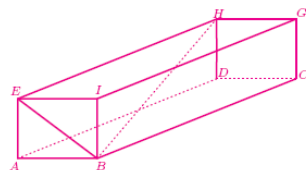
شکل ۴



شکل ۵

۳. شخصی ۱ کیلومتر به سمت شمال، ۲ کیلومتر به سمت شرق، ۳ کیلومتر به سمت شمال و ۴ کیلومتر به سمت شرق حرکت می‌کند. او از نقطه شروع چه فاصله‌ای دارد؟

۴. در مکعب مستطیل زیر، $AE = 3$ ، $AB = 4$ و $BC = 12$. محیط مثلث BED چقدر است؟



۵. نقاط $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ، $D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $E = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ را روی کاغذ شطرنجی نشان دهید. سپس ثابت کنید زاویه‌های $\widehat{ABC}$ و $\widehat{CDE}$ برابرند.

۶. محیط مثلث ABC به مختصات رأس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

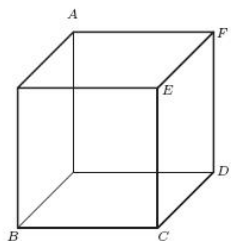
۷. الف) ثابت کنید اگر m و n دو عدد طبیعی باشند و $m > n$ ، آنگاه $m^2 + n^2$ طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که اضلاع آن $2mn$ و $m^2 - n^2$ هستند.

ب) با استفاده از روش «الف» شش مثلث قائم‌الزاویه غیر هم‌نهشت با طول اضلاع طبیعی بسازید.

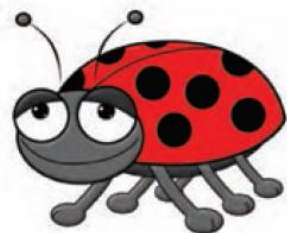
ج) اگر p و q طول ضلع‌های قائم و r طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه باشد، نشان دهید برای هر عدد طبیعی k ، اعداد kp ، kq و kr طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند.

د) با استفاده از روش «ج» شش مثلث غیر هم‌نهشت (متفاوت از مثلث‌های قسمت «ب») بسازید.

۸. در مکعب زیر، چند مثلث متساوی‌الاضلاع می‌توان ساخت به‌طوری‌که رأس‌های آن A, B, C, D, E, F یا باشند؟ همه این مثلث‌ها را نام ببرید.



۹. یک کفش‌دوزک درون یک اتاق مکعبی شکل به طول یال ۱، حرکت می‌کند. او از یک کنج اتاق شروع به حرکت می‌کند و تا کنج دیگری که در هیچ وجهی با کنج اول مشترک نیست، از طریق سقف و دیوار می‌رود. اگر او کوتاه‌ترین مسیر را پیموده باشد، چه مسافتی را طی کرده است؟



۱۰. در مثلث قائم‌الزاویه MOQ ، $(\hat{O} = 90^\circ)$ نقطه P روی ضلع OQ چنان قرار دارد که $MO = OP$ و $MP = PQ$. اگر $MO = a$ ، آنگاه طول ضلع MQ را برحسب a به‌دست آورید.

۱۱. نقطه E خارج از مربع $ABCD$ قرار دارد به گونه‌ای که مثلث DCE متساوی‌الاضلاع است. نقطه F درون مربع $ABCD$ قرار دارد به گونه‌ای که مثلث BCF متساوی‌الاضلاع است. اگر $AB = ۱$ ، آنگاه طول EF را به دست آورید.

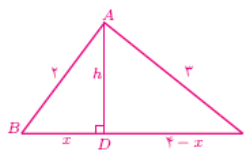
۱۲. مثلثی با اضلاع ۳ ، ۴ و ۵ مفروض است. مساحت این مثلث را حساب کنید.

بیژن و خسرو این مسئله را به صورت زیر حل کرده‌اند.

راه حل بیژن:

از رابطه فیثاغورس در مثلث ABD نتیجه می‌شود:

$$h^2 = 4^2 - x^2.$$



از رابطه فیثاغورس در مثلث ACD نتیجه می‌شود:

$$h^2 = 5^2 - (4-x)^2.$$

با توجه به دو رابطه‌ای که در بالا به دست آمد، داریم:

$$4^2 - x^2 = 5^2 - (4-x)^2 \implies 4 - x^2 = 9 - (16 - 4x + x^2)$$

$$\implies 4 - x^2 = 9 - 16 + 4x - x^2$$

$$\implies 11 = 4x$$

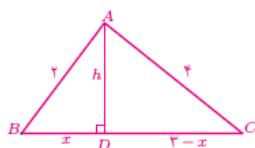
$$\implies x = \frac{11}{4}.$$

با جایگذاری مقدار x در رابطه فیثاغورس مثلث ABD داریم:

$$h^2 = 4 - \left(\frac{11}{4}\right)^2 \implies h = \frac{3\sqrt{15}}{4}.$$

بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با $\frac{3\sqrt{15}}{4}$.

راه حل خسرو:



$$\left. \begin{aligned} h^2 &= 3^2 - x^2 \\ h^2 &= 4^2 - (3-x)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3^2 - x^2 = 4^2 - (3-x)^2$$

$$\Rightarrow 4 - x^2 = 16 - (9 - 3x - 3x + x^2)$$

$$\Rightarrow 4 - x^2 = 16 - 9 + 6x - x^2$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

پس $h = \frac{\sqrt{15}}{3}$ و بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{15}}{3} \times 5 = \sqrt{15}.$$

درپاره دو راه حل بالا بحث کنید و سعی کنید راه حل نادرست را اصلاح کنید.

۱۳. در شکل زیر، CE بر AD عمود است. اگر $AC = \sqrt{6}$ ، $BC = 3$ ، $AE = \sqrt{3}$ ، $\hat{ADB} = 120^\circ$ و $DE = 1$ آنگاه اندازه هر یک از زاویه های مثلث ABC را به دست آورید.

