

پاسخ تشریحی ریاضی تکمیلی نهم

فصل چهارم

ویژه دانش آموزان علاقه مند به ریاضی

به نام خدا



کوشیار؛ جایی برای یادگیری !

www.kooshyarlearn.ir

instagram : @kooshyarlearn

telegram_admin : @kooshyar_admin

درسنامه و ویدئوی آموزشی

آموزش‌های ویژه برای شرکت در المپیادهای علمی

مباحث خاص تدریس شده در مدارس استعدادهای درخشان

رایگان یا با کمترین هزینه

هم‌اکنون در وبسایت کوشیار

- نکات ریاضی تکمیلی مدارس استعدادهای درخشان
- پایه نهم

• غیر رایگان

- حل تشریحی فصل دوم ریاضی تکمیلی
- موضوع : اعداد حقیقی
- نظرات خود را به آیدی تلگرام زیر بفرستید
- @kooshyar_admin
- صفحه ما را در اینستاگرام فالو کنید
- @kooshyarlearn

فلسفه کاری ما

کوشیار یک وبسایت آموزشی است که هدف خود را در دسترس قرار دادن منابع آموزشی **سطح بالا** برای عموم دانش آموزان قرار داده است. به بیان دیگر دانش آموزانی که به دلایل مختلف از منابع و کلاس های مناسب **محروم** هستند، با استفاده از محصولات کوشیار بتوانند **آموزش های تراز اول** کشور را (که در مدارس خاص مانند استعدادهای درخشان یا غیرانتفاعی) دریافت کنند.

این آموزش ها امروزه متمرکز بر دروس ریاضی محور هستند و شامل انواع کلاس های خاص مانند کلاس ریاضی تکمیلی (که صرفاً در مدارس **استعدادهای درخشان** تدریس می شود)، کلاس های ریاضی عادی، کارگاه های حل مسئله و **کارسوق** (کارگاه بررسی یک موضوع جالب در ریاضیات) می شود. البته بحث های دیگر مانند **فیزیک و برنامه نویسی** نیز در برنامه کاری ما قرار دارد. شما می توانید:

اولاً با پرسیدن سوالات و ابهامات خود از طریق تلگرام ما را یاری کنید.

ثانیاً با گزارش امکانات مدارس خود (دولتی ، سمپاد ، غیردولتی) در امور فوق برنامه خلأهای موجود را به ما بگویید

ثالثاً با پیشنهادات خود ما را در خدمات رسانی بهتر یاری کنید!

کوشیار جایی برای یادگیری!

سوال :

۱. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $2^3 - 2^{-3}$

ب) $5^2 + 5^2 - 3^{-3}$

ج) $3^4 \times 5^{-2} - 2^{-2}$

د) $5^2 - 3^2 \times (-3)^{-2}$

ه) $-2^{-3} \times (-2)^{-4} - 8$

و) $2 \times 5^{-4} + 2^{-3} \times 3^{-2}$

ز) $3^4 \times 3^5 \times 5^2 \times 3^{-7} - 5^3$

ح) $4^3 + 4^3 + 4^3 - 3^4 \times 3^{-1}$

ط) $\frac{3^4 \times 5^2 \times 3^3}{5^3 \times 2^7 \times 5}$

ی) $\frac{2 + 3 \times 4^{-1} - 2 \times 5^{-1}}{3^2 \times 2^{-2} - 5}$

پاسخ :

الف

$$8 - \frac{1}{8} = \frac{63}{8}$$

ب

$$50 - \frac{1}{27} = \frac{1349}{27}$$

ج

$$\frac{81}{25} - \frac{1}{4}$$

د

$$25 - 1$$

ه

$$-\frac{1}{8} \times \frac{1}{16} - 8$$

و

$$\frac{2}{625} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{9}$$

ز

$$3^2 \times 25 - 125$$

ح

$$64 \times 3 - 27$$

ط

$$\frac{3^7}{25 \times 128}$$

ی

$$\frac{(2 + 0.75 - 0.4)}{\frac{9}{4} - 5}$$

سوال :

۲. عبارت‌های زیر را ساده کنید و توان‌های منفی را از بین ببرید.

الف) $\frac{3^{-4}}{5^{-1}}$

ب) $\frac{2a^{-1}b^{-2}}{a^{-3}b^{-2}}$

ج) $\frac{(0.1)^{-1}}{10^{-1}}$

د) $\frac{2x^{-3}}{3^{-3}y}$

پاسخ :

$$\frac{3^{-4}}{5^{-1}} = \frac{5}{3^4}$$

$$\frac{2a^{-1}b^{-2}}{a^{-3}b^{-2}} = 2a^2$$

$$\frac{0.1^{-1}}{10^{-1}} = \frac{10}{0.1} = 100$$

$$\frac{2x^{-3}}{3^{-3}y} = \frac{54}{yx^3}$$

سوال :

۳. عبارت‌های زیر را ساده کنید و توان‌های منفی را از بین ببرید.

الف) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-4}$

ب) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-2}$

ج) $\left(\frac{2a^{-1}}{3^{-2}}\right)^{-2}$

د) $\left(\frac{x^{-1}}{y^{-1}z}\right)^{-1}$

پاسخ :

$$5^4$$

$$\left(\frac{7}{3}\right)^2$$

$$\left(\frac{2a^{-1}}{3^{-2}}\right)^{-2} = \left(\frac{18}{a}\right)^{-2} = \left(\frac{a}{18}\right)^2$$

$$\left(\frac{x^{-1}}{y^{-1}z}\right)^{-1} = \left(\frac{y}{xz}\right)^{-1} = \frac{xz}{y}$$

سوال :

۴. هر یک از عبارت‌های زیر را ساده کنید و توان‌های منفی را از بین ببرید.

الف) $\left(\frac{2a^{-1}b}{a^2b^{-3}}\right)^{-3}$ ب) $\left(\frac{q^{-1}r^{-1}s^{-2}}{r^{-5}sq^{-8}}\right)^{-1}$

ج) $\left(\frac{s^2t^{-4}}{5s^{-1}t}\right)^{-2}$ د) $\left(\frac{xy^{-2}z^{-3}}{x^2y^3z^{-4}}\right)^{-3}$

پاسخ :

$$\left(\frac{2a^{-1}b}{a^2b^{-3}}\right)^{-3} = (2a^{-3}b^4)^{-3} = \left(\frac{a^9}{8b^{12}}\right)$$

$$\left(\frac{q^7r^4}{s^3}\right)^{-1} = \frac{s^3}{q^7r^4}$$

$$\left(\frac{s^3}{5t^5}\right)^{-2} = 25 \frac{t^{10}}{s^6}$$

$$\frac{x^3y^{15}}{z^3}$$

سوال :

۵. کدام یک از اعداد زیر بین صفر و یک است؟

الف) $\left(\frac{3^2 \times 2^{-3}}{5^{-4}}\right)^{-1}$

ب) $\left(\frac{2^{-2} \times 5^3}{3^3 \times 7^{-2}}\right)^{-2}$

پاسخ :

$$\left(9 \times \frac{625}{8}\right)^{-1} = \frac{8}{9 \times 625} < 1$$

$$\left(\frac{49 \times 125}{27 \times 4}\right)^{-2} = \left(\frac{27 \times 4}{49 \times 125}\right)^2 < 1$$

سوال :

۶. اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^{-1} \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} \quad \left(-\frac{3}{2}\right)^{-2} \quad \left(-\frac{4}{3}\right)^{-3}$$

پاسخ :

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^{-1} = -4$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} = -2$$

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{4}{9}$$

$$\left(-\frac{4}{3}\right)^{-3} = -\frac{27}{64}$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^{-1} < \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} < \left(-\frac{4}{3}\right)^{-3} < \left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}$$

سوال :

۷. عدد $\left(\frac{1}{64}\right)^{-12}$ را به صورت عدد 2^m نوشته‌ایم. مقدار m را بیابید.

پاسخ :

$$\left(\frac{1}{64}\right)^{-12} = (2^{-6})^{-12} = 2^{72}$$

$$m = 72$$

kooshyarlearn.ir

سوال :

۸. اگر a عددی گویا و b عددی صحیح باشد و $6^8 = 3^2 \times a^b$ ، آنگاه حداقل پنج مقدار مختلف برای $a + b$ بیابید.

پاسخ :

$$\frac{6^8}{3^2} = 2^8 \times \frac{3^8}{3^2} = 2^8 \times 3^6 = a^b$$

$$a = 2^8 \times 3^6, \quad b = 1$$

$$a = 2^4 \times 3^3, \quad b = 2$$

$$a = -2^4 \times 3^3, \quad b = 2$$

$$a = 2^{-8} \times 3^{-6}, \quad b = -1$$

$$a = 2^{-4} \times 3^{-3}, \quad b = -2$$

سوال :

۹. فرض کنید m و n دو عدد صحیح باشند.

الف) برای n^{-m} چند مقدار وجود دارد به طوری که تساوی $m^n = 2^{10}$ برقرار باشد؟

ب) برای m^{-n} چند مقدار وجود دارد به طوری که تساوی $m^n = 2^{20}$ برقرار باشد؟

پاسخ :

(الف)

$$m^n = 2^{10} \rightarrow m = 2, n = 10 \rightarrow n^{-m} = 10^{-2}$$

$$m^n = 2^{10} \rightarrow m = 4, n = 5 \rightarrow n^{-m} = 5^{-4}$$

$$m^n = 2^{10} \rightarrow m = 32, n = 2 \rightarrow n^{-m} = 2^{-32}$$

$$m^n = 2^{10} \rightarrow m = 2^{10}, n = 1 \rightarrow n^{-m} = 1$$

$$m^n = 2^{10} \rightarrow m = -2, n = 10 \rightarrow n^{-m} = 10^2$$

$$m^n = 2^{10} \rightarrow m = -32, n = 2 \rightarrow n^{-m} = 2^{32}$$

(ب)

$$m^n = 2^{20} \rightarrow m^{-n} = 2^{-20}$$

سوال :

۱۰. به جای x چه عددی باید قرار گیرد؟

$$3^{-102} - 3^{-101} + 3^{-100} - 3^{-99} = 3^{-99}x$$

۱۱. اگر $n \in \mathbb{Z}$ و $(n^n)^{1396} = 1$ ، آنگاه مقدار n را بیابید.

پاسخ :

$$3^{-99} \left(\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 1 \right) = 3^{-99}x$$

$$\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 1 = \frac{1 - 3 + 9 - 27}{27} = -\frac{20}{27} = x$$

$$(n^n)^{1396} = 1 = 1^{1396}$$

$$n = 1$$

$$n = -1$$

سوال :

۱۳. اگر $\{m, n\} \subseteq \mathbb{N}$ و $a \in \mathbb{R}$ ، مثالی بیابید که

$$a^m + a^n = a^{m+n} \quad (\text{الف}) \quad a^m + a^n = a^{mn} \quad (\text{ب})$$

۱۴. x و y چه اعدادی هستند؟

$$2^{2^2} = 2^{2^2} x = 4^{y^3}$$

۱۵. حاصل عبارت زیر را به صورت یک عدد توان دار با توان ۵ بنویسید.

$$\frac{3^4 + 3^3 \times 3 + \frac{1}{9} \times 27^2}{(2^6)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \times 2^{-4}}$$

پاسخ :

$$2^1 + 2^1 = 2^{1+1}$$

$$0^1 + 0^3 = 0^{1 \times 3}$$

$$2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 2^4 x = 2^{2y^3}$$

$$x = 2^{12}, \quad y = 2$$

$$\frac{3^5}{2^{10}} = \left(\frac{3}{4}\right)^5$$

$$\frac{3^4 + 3^4 + 3^4}{2^{12} \times 2^2 \times 2^{-4}} = \frac{3^5}{2^{10}} = \left(\frac{3}{2^2}\right)^5 = \left(\frac{3}{4}\right)^5$$

سوال :

۱۶. در هر یک از قسمت‌های زیر، x و y را بیابید.

الف) $\frac{15^3}{2^3} = \left(\frac{5}{2}\right)^x \times 3^y$

ب) $\frac{15^5}{14^5} = \left(\frac{3}{7}\right)^x \left(\frac{5}{2}\right)^y$

ج) $\frac{2^{15}}{15^2} \times \frac{2^{-10}}{5} = \left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{2}{5}\right)^y$

د) $\frac{2^{13} \times 3^2}{2^{13}} = \left(\frac{7}{2}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^y$

پاسخ :

$$\frac{5^3 \times 3^3}{2^3} = \frac{5^x \times 3^y}{2^x}$$

$$x = 3, \quad y = 3$$

$$\frac{3^5 \times 5^5}{7^5 \times 2^5} = \frac{3^x \times 5^y}{7^x \times 2^y}$$

$$x = 5, \quad y = 5$$

$$\frac{2^{15} \times 2^{-10}}{3^2 \times 5^3} = \frac{2^x \times 2^y}{3^x \times 5^y}$$

$$x = 2, \quad y = 3$$

$$\frac{7^3 \times 3^5}{2^{13}} = \frac{7^x \times 3^y}{2^x \times 2^{2y}}$$

$$x = 3, y = 5$$

سوال :

ریشه‌گیری

۱. الف) اگر x عددی نامنفی باشد، ریشه‌های دوم x^2 را بیابید.

ب) اگر x عددی نامنفی باشد، حاصل $\sqrt{x^2}$ چیست؟

ج) اگر x عددی منفی باشد، ریشه‌های دوم x^2 را بیابید.

د) اگر x عددی منفی باشد، حاصل $\sqrt{x^2}$ چیست؟

پاسخ :

الف)

$$\pm x$$

ب)

$$x$$

ج)

$$\pm x$$

د)

$$-x$$

سوال :

۲. می‌دانیم $\sqrt[3]{54a^3z^8}$ عددی حقیقی است. کدام عبارت درست و کدام نادرست است؟ برای

عبارت درست دلیل بیاورید و برای عبارت نادرست مثالی بیاورید که درستی آن را نقض کند.

الف) $\sqrt[3]{54a^3z^8} = 3|a|z^2\sqrt[3]{2z^2}$ ب) $\sqrt[3]{54a^3z^8} = 3az^2\sqrt[3]{2z^2}$

پاسخ :

حقیقی بودن آنچه در صورت سوال آمده است، اطلاعات خاصی به ما نمی‌دهد. یعنی به ازای همه‌ی مقادیر حقیقی برای a, z مقدار $\sqrt[3]{54a^3z^8}$ نیز حقیقی است.

الف) اگر a منفی باشد، آنگاه این تساوی برقرار نیست.

ب) همواره صحیح است.

سوال :

۳. می‌دانیم $\sqrt{54a^3z^8}$ عددی مثبت است. کدام عبارت درست و کدام نادرست است؟ برای عبارت درست دلیل بیاورید و برای عبارت نادرست مثالی بیاورید که درستی آن را نقض کند.

الف) $\sqrt{54a^3z^8} = 3|a|z^4\sqrt{6a}$ ب) $\sqrt{54a^3z^8} = 3az^4\sqrt{6a}$

پاسخ :

حقیقی بودن آنچه در صورت سوال آمده است، اطلاعات خاصی به ما می‌دهد. یعنی تنها به ازای مقادیر مثبت برای a مقدار $\sqrt{54a^3z^8}$ نیز حقیقی و مثبت است.

الف) درست است. چرا که طبق فرض سوال a باید مثبت باشد.

ب) درست است. چرا که طبق فرض سوال a باید مثبت باشد.

سوال :

۴. پس از آزمون ریاضی نیم سال اول، نمره دانش آموزان ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ شده بود! معلم ریاضی تصمیم گرفت برای کمک به دانش آموزان، نمره هر دانش آموز را در ۲۰ ضرب کند، سپس از حاصل جذر بگیرد و نمره به دست آمده را در کارنامه وارد کند.



الف) چه نمره‌هایی تغییر نمی‌کنند؟

ب) چه نمره‌هایی بیشترین تغییر را دارند؟

ج) چه نمره‌ای پس از تغییر عدد صحیح خواهد بود؟

پاسخ :

الف)

$$\sqrt{20x} = x \rightarrow x = 0, 20$$

ب) نمره پنج

$$\sqrt{20 \times 5} - 5 = 5$$

ج)

$$\sqrt{20x} \in \mathbb{Z} \rightarrow x = 0, 5, 20$$

سوال :

۵. اگر $\sqrt{x} = ۹۲۶۱$ و $\sqrt[3]{y} = ۶$ ، آنگاه $\sqrt[3]{xy}$ چه عددی است؟

۶. اگر $\sqrt[3]{x\sqrt{x}} = ۴$ ، آنگاه x چه عددی است؟

پاسخ :

$$x^{\frac{1}{2}} = 21^3$$

$$y^{\frac{1}{3}} = 6$$

$$\sqrt[3]{xy} = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \times 6 = 21^2 \times 6$$

$$(x\sqrt{x})^{\frac{1}{3}} = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}} = 4$$

$$x = 16$$

سوال :

۷. هر یک از عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $\sqrt{75a^3x}$

ب) $\sqrt[3]{a^2b}\sqrt[3]{64a^4b}$

ج) $\sqrt{\frac{162b^5c^5}{125x^2y^4}}$

د) $\sqrt[3]{\frac{54b^4c^6}{-32x^5y^9}}$

ه) $\sqrt{128a^5b^3}$

و) $\sqrt[3]{250a^4b^3c^2}$

ز) $\sqrt{\frac{150x^2y^6}{81a^7b^4}}$

ح) $\sqrt[3]{\frac{-40x^3y^5}{81t^5s^7}}$

پاسخ :

(الف)

$$\sqrt{75a^3x} = 5a\sqrt{3ax}$$

(ب)

$$\sqrt[3]{a^2b} \sqrt[3]{64a^4b} = 4a^2\sqrt[3]{b^2}$$

(ج)

$$\sqrt{\frac{(162b^5c^5)}{125x^2y^4}} = \frac{9b^2c^2}{5xy^2} \sqrt{\frac{2bc}{5}}$$

(د)

$$\sqrt[3]{\frac{54b^4c^6}{-32x^5y^9}} = \sqrt[3]{\frac{3^3b^4c^6}{(-2)^4x^5y^9}} = \frac{3bc^2}{-2xy^3} \sqrt[3]{\frac{b}{x^2}}$$

(ه)

$$\sqrt{128a^5b^3} = \sqrt{2^7a^5b^3} = 2^3a^2b\sqrt{2ab}$$

(و)

$$\sqrt[3]{250a^4b^3c^2} = \sqrt[3]{(5^3)(2)a^4b^3c^2} = 5ab\sqrt[3]{2ac^2}$$

(ز)

$$\sqrt{\frac{150x^2y^6}{81a^7b^4}} = \sqrt{\frac{(5^2)(2)x^2y^6}{3^3a^7b^4}} = \frac{5xy^3}{3a^3b^2}\sqrt{\frac{2}{3a}}$$

(ح)

$$\sqrt[3]{\frac{-40x^3y^5}{81t^5s^7}} = \sqrt[3]{\frac{(-2)^3(5)x^3y^5}{3^4t^5s^7}} = \frac{(-2)xy}{3ts^2}\left(\sqrt[3]{\frac{5y^2}{3t^2s}}\right)$$

سوال :

۸. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\sqrt[3]{-(-7)^{-6}}$

ب) $\sqrt{(\pi^2 - 10)^2}$

ج) $\sqrt{\frac{8^{10} + 4^{10}}{8^4 + 8^{11}}}$

د) $(\sqrt{3} - \sqrt{6})^2$

ه) $\frac{2\sqrt{8} - \sqrt{50} + 3\sqrt{18} + \sqrt{162}}{\sqrt{200}}$

پاسخ :

$$\sqrt[3]{-(-7)^{-6}} = -7^{-2} = -\frac{1}{49}$$

$$\sqrt{(\pi^2 - 10)^2} = 10 - \pi^2$$

$$\sqrt{\frac{8^{10} + 4^{10}}{8^4 + 8^{11}}} = \sqrt{\frac{2^{30} + 2^{20}}{2^{12} + 2^{33}}} = \sqrt{\frac{2^{20}(2^{10} + 1)}{2^{12}(2^{21} + 1)}} = 2^4 \sqrt{\frac{(2^{10} + 1)}{(2^{21} + 1)}}$$

$$(\sqrt{3} - \sqrt{6})^2 = 3 + 6 - 2\sqrt{18} = 9 - 6\sqrt{2}$$

$$\frac{2\sqrt{8} - \sqrt{50} + 3\sqrt{18} + \sqrt{162}}{\sqrt{200}} = \frac{4\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 9\sqrt{2} + 9\sqrt{2}}{10\sqrt{2}} = \frac{17}{10}$$

سوال :

۹. اگر $۳ < a < ۵$ ، آنگاه درستی تساوی زیر را بررسی کنید.

$$\sqrt{(a-۶)^۶(a-۳)^۳} = -(a-۶)^۳(a-۳)\sqrt{a-۳}$$

۱۰. اگر $a < ۰$ ، $b > ۰$ و $c < ۰$ ، آنگاه عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $\sqrt{a^۲b^۵c^۴}$

ب) $\sqrt[۳]{a^۲b^۵c^۴}$

پاسخ :

$$a - 6 < 0$$

$$a - 3 > 0$$

بنابراین حاصل رادیکال مثبت است و این یعنی درست بودن جواب.

$$\sqrt{a^۲b^۵c^۴} = (-a)c^2b\sqrt{b}$$

$$\sqrt[۳]{a^۲b^۵c^۴} = bc\sqrt[۳]{a^۲b^2c}$$

سوال :

۱۱. ابراهیم برای محاسبه اولین رقم بعد از ممیز عدد $\sqrt[3]{9}$ این گونه عمل کرد:

روش ابراهیم

برای محاسبه اولین رقم بعد از ممیز عدد $\sqrt[3]{9}$ کافی است بدانیم که عدد $\sqrt[3]{9}$ یا $\sqrt[3]{9000}$ بین کدام دو عدد طبیعی متوالی قرار دارد.

$$20^3 < 9000 < 21^3 \Rightarrow \sqrt[3]{20^3} < \sqrt[3]{9000} < \sqrt[3]{21^3}$$

$$\Rightarrow 20 < \sqrt[3]{9000} < 21$$

$$\Rightarrow 20 < 10\sqrt[3]{9} < 21$$

$$\Rightarrow 2 < \sqrt[3]{9} < 2.1$$

بنابراین اولین رقم بعد از ممیز عدد $\sqrt[3]{9}$ صفر است.

الف) اولین رقم بعد از ممیز $\sqrt[3]{10}$ را به دست آورید.

ب) دومین رقم بعد از ممیز $\sqrt[3]{10}$ را به دست آورید.

پاسخ :

Kooshyar

سوال :

۱. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\left(1 + \frac{\sqrt{8} + 2}{1 + \sqrt{2}}\right)^{-1}$$

۲. در هر یک از قسمت‌های زیر، x را بیابید.

الف) $x - \sqrt{6} = 6\sqrt{6}$

ب) $-2\sqrt{7} - x = -5\sqrt{7}$

ج) $\sqrt[3]{12} + 3\sqrt[3]{96} - x = -9\sqrt[3]{12}$

د) $\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{-24} - x = \frac{9}{10}\sqrt[3]{3}$

ه) $2\sqrt{20} + \sqrt{90} + x = 4\sqrt{5} + 23\sqrt{10}$

و) $\sqrt{\frac{5}{49}} + x + 3\sqrt{\frac{125}{36}} = \frac{213}{70}\sqrt{5}$

پاسخ :

$$\left(1 + \frac{\sqrt{8} + 2}{1 + \sqrt{2}}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{2\sqrt{2} + 2}{1 + \sqrt{2}}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{2(\sqrt{2} + 1)}{1 + \sqrt{2}}\right)^{-1} = (1 + 2)^{-1} = \frac{1}{3}$$

(الف)

$$x = \sqrt{6} + 6\sqrt{6} = 7\sqrt{6}$$

(ب)

$$-2\sqrt{7} + 5\sqrt{7} = 3\sqrt{7} = x$$

(ج)

$$\sqrt[3]{12} + 3(2\sqrt[3]{12}) - x = -9\sqrt[3]{12}$$

$$15\sqrt[3]{12} = x$$

(د)

$$3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} - x = \frac{9}{10}\sqrt[3]{3}$$

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{10} = x$$

(ه)

$$4\sqrt{5} + 3\sqrt{10} + x = 4\sqrt{5} + 23\sqrt{10}$$

$$x = 20\sqrt{10}$$

(و)

$$\frac{\sqrt{5}}{7} + x + \frac{15\sqrt{5}}{6} = \frac{213}{70}\sqrt{5}$$

$$x = \frac{213}{70}\sqrt{5} - \frac{10\sqrt{5}}{70} - \frac{175\sqrt{5}}{70}$$

$$x = \frac{28}{70}\sqrt{5} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$$

سوال :

۳. در هر یک از قسمت‌های زیر، A را بر حسب x و y به دست آورید.

الف) $\sqrt{16x} + A = (4 + x^2)\sqrt{x}$ ب) $\sqrt[3]{2y^4} - A = (y - 3)\sqrt[3]{2y}$
 ج) $\sqrt[3]{250x^4y^5} - A = xy\sqrt[3]{2xy^2}$ د) $A + \sqrt{9x^5y^4} = 5x^2y^4\sqrt{xy}$

۴. کدام یک از راه‌حل‌های زیر را برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$ بیشتر می‌پسندید؟!

$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt[3]{4}} &= \frac{2}{\sqrt[3]{4}} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} \\ &= \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} \\ &= \frac{2\sqrt[3]{2}}{2} \\ &= \sqrt[3]{2}\end{aligned}$	$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt[3]{4}} &= \frac{2}{\sqrt[3]{4}} \times \frac{\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^2}} \\ &= \frac{2\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{4^3}} \\ &= \frac{4\sqrt[3]{2}}{4} \\ &= \sqrt[3]{2}\end{aligned}$
---	--

پاسخ :

(الف)

$$A = (4 + x^2)\sqrt{x} - 4\sqrt{x} = x^2\sqrt{x}$$

(ب)

$$y^3\sqrt[3]{2y} + (3 - y)^3\sqrt[3]{2y} = 3^3\sqrt[3]{2y} = A$$

(ج)

$$5xy^3\sqrt[3]{2xy^2} - xy^3\sqrt[3]{2xy^2} = 4xy^3\sqrt[3]{2xy^2} = A$$

(د)

$$A = -3x^2y^4\sqrt{xy} + 5x^2y^4\sqrt{xy} = 2x^2y^4\sqrt{xy}$$

تبدیل مخرج سمت راست سیستماتیک تر است و می توان برای قیه مسائل هم استفاده کرد. یعنی برای هر a داریم

$$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a^2} = a$$

kooshyarlearn.ir

سوال :

۵. درستی یا نادرستی هریک از عبارت‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\frac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3}-1$

ب) $\frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{3}{\sqrt{3}}-1$

ج) $\frac{3}{\sqrt[3]{28}} = \frac{3}{22}$

د) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$

پاسخ :

الف) درست

$$2 = (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1) = (\sqrt{3})^2 - 1^2 = 3 - 1 = 2$$

ب) درست

$$\frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$2\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)(3-\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - 3 + 3 - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

ج) غلط

$$\frac{3}{\sqrt[3]{28}} = \frac{3}{(2^2)\sqrt[3]{2^2}} \neq \frac{3}{2^2}$$

د) غلط

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

$$1 \times 2 \neq \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2}$$

$$2 \neq \sqrt[3]{4}$$

سوال :

۶. مخرج هر یک از کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{1}{\sqrt{52}}$ ب) $\frac{24}{\sqrt{12}}$ ج) $\frac{11}{\sqrt{5}\sqrt[3]{7}}$ د) $\frac{\sqrt[3]{15}}{\sqrt{15}}$

پاسخ :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{52}} = \frac{1}{\sqrt[3]{52}} \times \frac{\sqrt[3]{52^2}}{\sqrt[3]{52^2}} = \frac{\sqrt[3]{52^2}}{52}$$

$$\frac{24}{\sqrt{12}} = \frac{24}{\sqrt{12}} \times \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}} = \frac{24\sqrt{12}}{12} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{11}{\sqrt{5}\sqrt[3]{7}} = \frac{11}{\sqrt{5}\sqrt[3]{7}} \times \frac{\sqrt{5}\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt{5}\sqrt[3]{7^2}} = \frac{11\sqrt{5}\sqrt[3]{7^2}}{5 \times 7} = \frac{11\sqrt{5}\sqrt[3]{7^2}}{35}$$

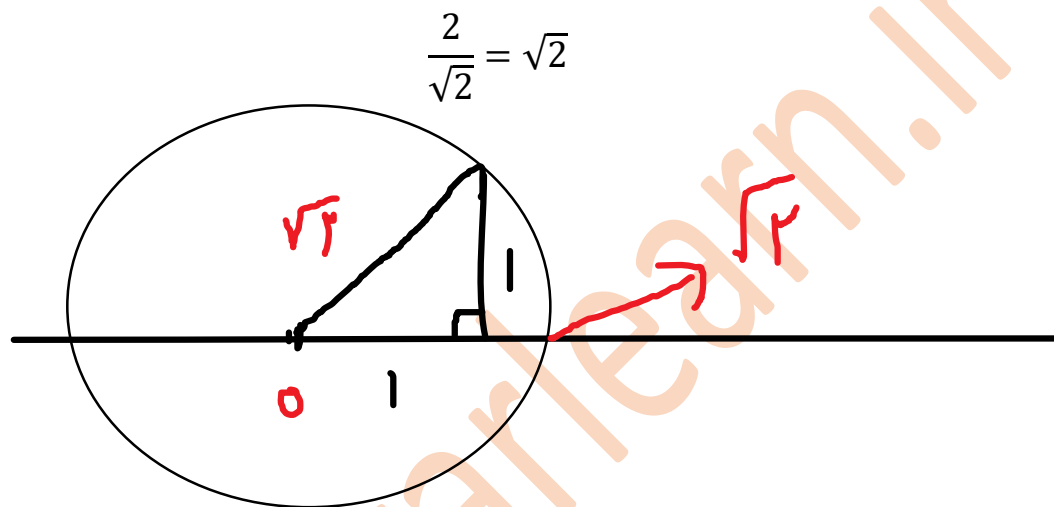
$$\frac{\sqrt[3]{15}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt[3]{15}}{\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt[3]{15}\sqrt{15}}{15}$$

سوال:

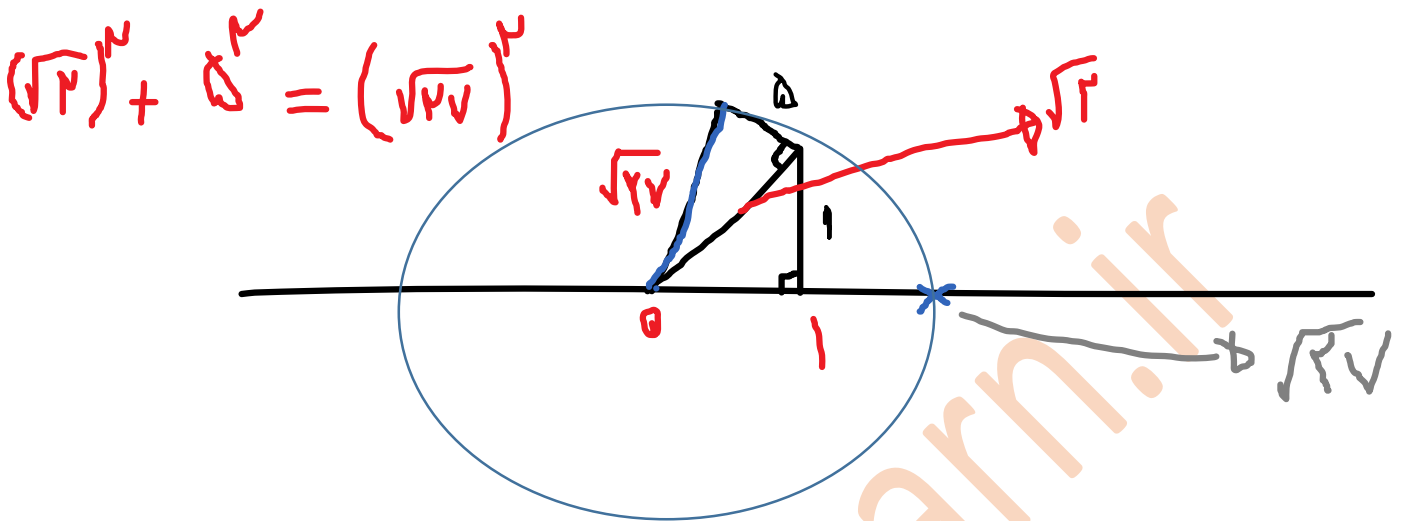
۷. هر یک از اعداد زیر را روی محور اعداد نمایش دهید.

- الف) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ ب) $\frac{9}{\sqrt{3}}$ ج) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ د) $\frac{5}{\sqrt{20}}$

پاسخ:

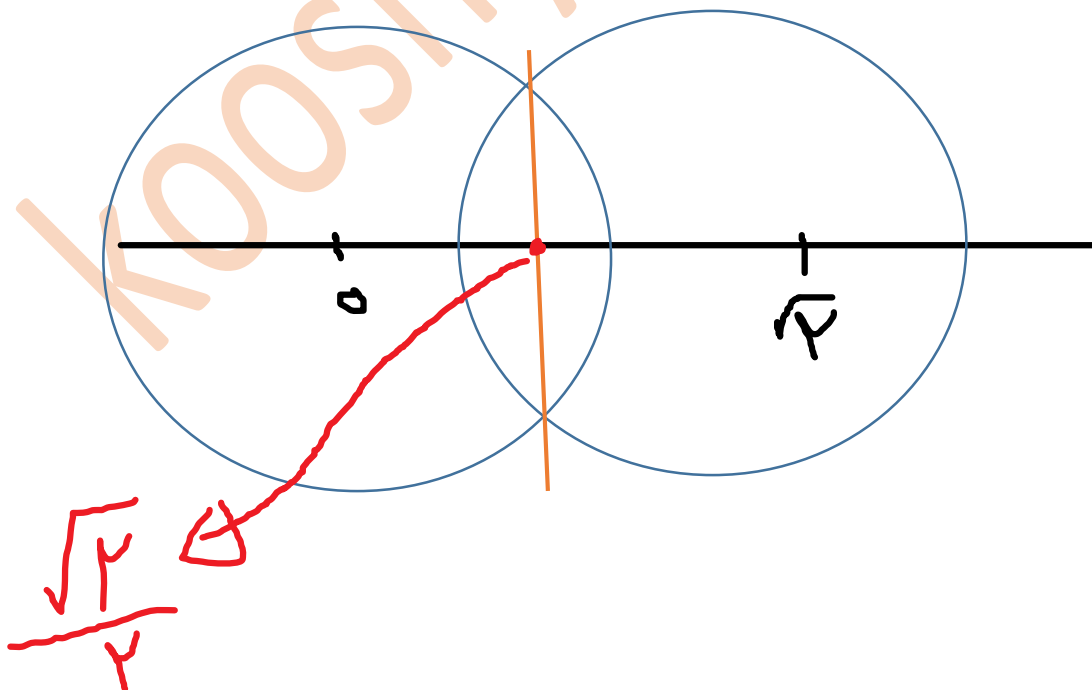


$$\frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{9}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3} = \sqrt{27}$$

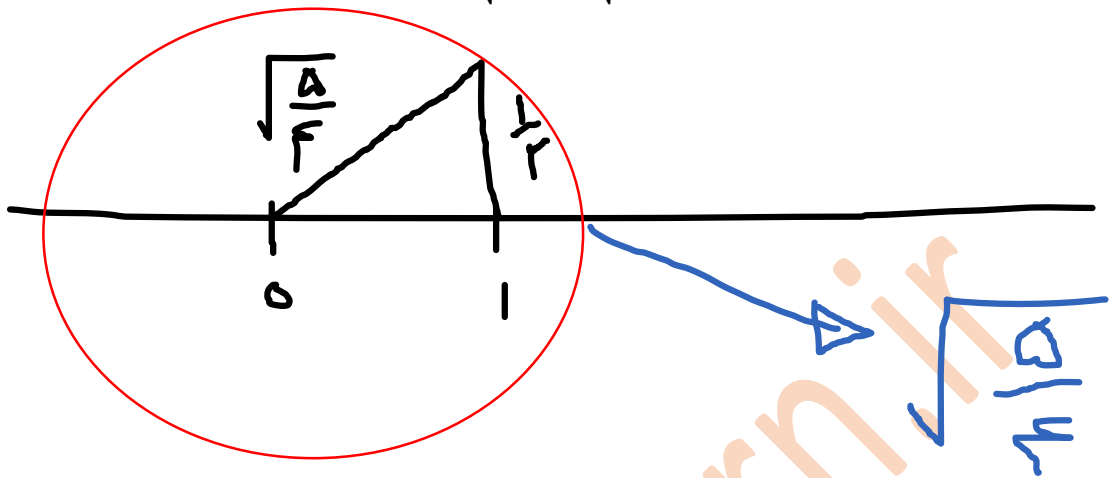


$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

کافیست $\sqrt{2}$ که در قسمت الف بدست آمد را نصف کنیم. برای نصف کردن باید عمود منصف پاره خط را رسم کنیم. رسم عمود منصف با کشیدن دو دایره با شعاع برابر که مراکز آنها دو سر پاره خط باشد ممکن است. سپس دو نقطه که محل برخورد دو دایره هستند را به هم وصل می کنیم.



$$\frac{5}{\sqrt{20}} = \sqrt{\frac{25}{20}} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$



$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \left(\sqrt{\frac{5}{4}}\right)^2$$